Tadeusz E. Doroziński
www.3doro.de

Mędrzec widzi w lustrze głupca, głupiec przeciwnie.
Hugo Steinhaus
(Słownik racjonalny)

Problemy (nie) do rozwiązania?

Przed laty, uczęszczając do liceum natknąłem się na dwa zadania, których nie byłem w stanie rozwiązać konwencjonalnymi metodami, a więc przy użyciu dostępnych mi formuł matematycznych. Oba zadania robiły wrażenie dość łatwych, gdyż zawierały wystarczającą ilość danych i wydawało się, że wyliczenie niewiadomych nie powinno nastręczaś trudności, co okazywało się jednak złudne. W jednym przypadku otrzymywaliśmy równanie wyższego stopnia z jedną niewiadomą, która na dodatek była liczbą niewymierną, a w drugim przypadku mieliśmy do czynienie z odwrotnymi funkcjami trygonometrycznymi, ktore nie były objęte programem szkolnym. Wówczas obydwa zadania pozostały dla mnie nierozwiązywalne.

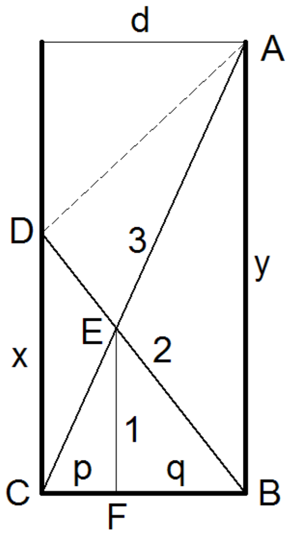
Będąc na studiach miałem przyjemność i zaszczyt poznać prof. Hugona Steinhausa i kiedyś, przy okazji, zagadnąłem go o te przypadki. Prof. Steinhaus powiedział mi, że jeśli czegoś nie jesteśmy w stanie wyliczyć analitycznie, to musimy posłużyć sie metodami przybliżonymi, które w praktyce są wystarczające. Taką jest np. metoda kolejnych przybliżeń (iteracji) i „metoda artylerzysty", ktorą prof. Steinhaus wzmiankuje w swoim **„Kalejdoskopie matematycznym".**

Obydwa zadania są dobrymi przykładami na zastosowanie metod kolejnych przybliżeń.

1. Zadanie ze studnią.

Do studni wrzucono dwa kije o długości dwóch i trzech metrów, które skrzyżowały się w punkcie leżącym jeden metr nad dnem studni. Jaka jest średnica studni?

Geometrycznie chodzi więc o trapez prostokątny, w którym znamy długości obu przekątnych i odległość punktu przecięcia przekątnych od boku prostopadłego do podstaw, którego długości szukamy (*rys. 1*).



Rys. 1

Z *rys.1* wynikają następujące równości:

$$d = p + q, \quad x^2 = 4 - d^2, \quad y^2 = 9 - d^2, \qquad (1)$$

z czego otrzymujemy:

$$y^2 - x^2 = 5 \qquad (2).$$

Dalej mamy

$$\frac{1}{x} = \frac{q}{d} \quad \text{i} \quad \frac{1}{y} = \frac{p}{d} \qquad (3)$$

co daje nam

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \qquad (4).$$

Z równań (2) i (4) otrzymujemy:

$$x = 1 + \frac{x}{\sqrt{5 + x^2}} \qquad (5).$$

W równaniu tym mamy po lewej i po prawej stronie funkcję zmiennej *x*. Możliwe jest, że to równanie ma kilka rozwiązań, ale nas interesuje wartość *x* w przedziale (1,2). Obliczymy ją metodą kolejnych przybliżeń (iteracji) z dowolnie przyjętą wcześniej dokładnością. W naszym przypadku może to być np. 1 mm, czyli 0,001 m.
Sposób postępowania jest następujący: szacując wielkość *x* na *rys. 1* przyjmujemy pierwsze przybliżenie $x_0 = 1{,}6$ i tą wartość podstawiamy do prawej strony równania (5). Otrzymujemy lepsze przybliżenie $x_1 = 1{,}58$, które ponownie podstawiamy itd., aż stwierdzimy, że różnica dwóch ostatnich przybliżeń *x* jest mniejsza od przyjętej przez nas dokładności. Otrzymany wynik 1,576 wstawiamy do równania

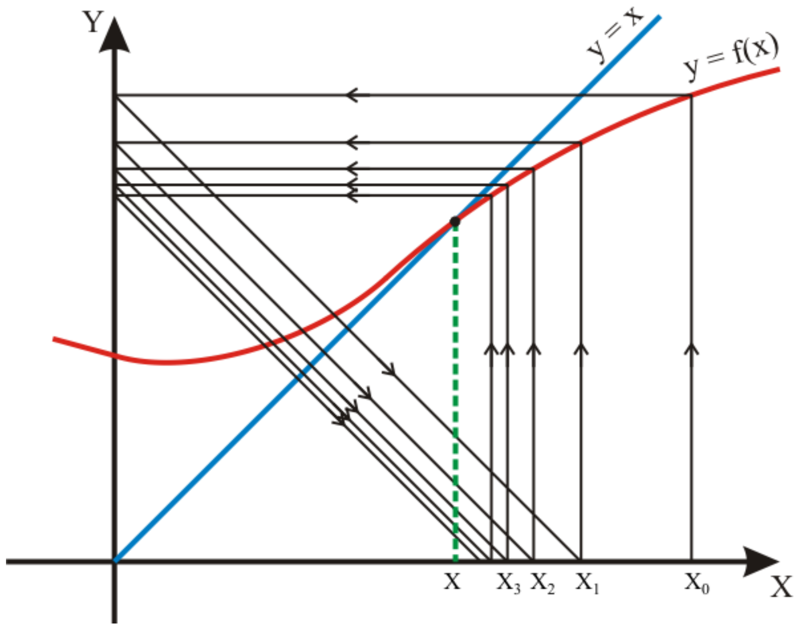
$$d = \sqrt{4 - x^2}$$

i otrzymujemy średnicę studni *d =1,231* z wystarczającą dokładnością.

W obliczaniu kolejnych przybliżeń najlepiej jest skorzystać z możliwości jakie daje nam komputer. Obok przykład małego programu w Basic'u.

```
x = 1.6  // Pierwsze przybliżenie
Repeat
  z = x
  x = 1 + z / (Sqrt(5 + z * z))
Until Abs(z - x) < .0001
Print x
d = Sqrt(4 - x * x)
Print  d
```

Zasadę iteracji ilustruje *rys. 2.*

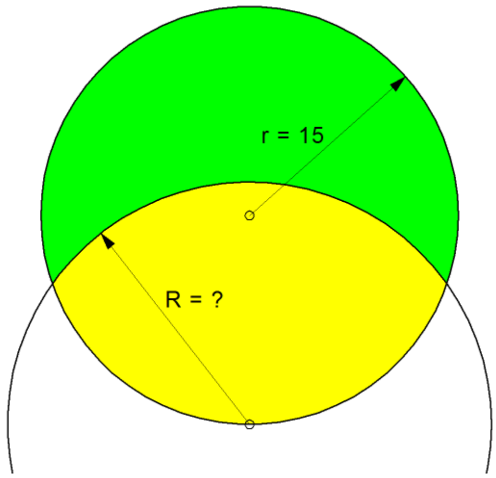


Rys. 2

2. Zadanie z kozą.

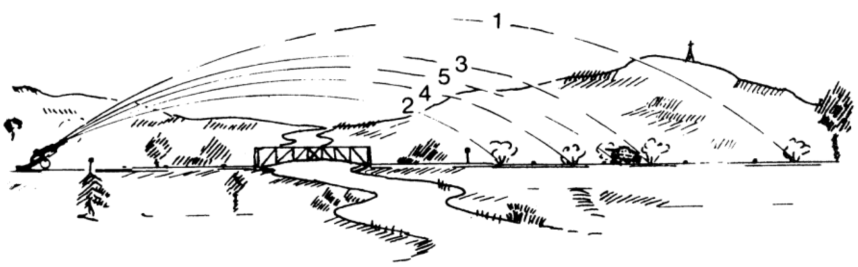
Na łące, która ma kształt koła o średnicy 30 m, pasie się koza uwiązana na sznurze. Sznur przymocowany jest do palika wbitego w brzeg łąki. Jak długi powinien być sznur, aby koza zjadła co najwyżej połowę trawy na łące?

Mamy tu więc geometryczny problem połowienia powierzchni jakiegoś koła okręgiem, którego środek znajduje się na obwodzie tego koła (*rys. 3*).



Rys. 3

Do obliczenia *R* zastosujemy tym razem wspomnianą już wyżej „metodę artylerzysty”.
Prof. Steinhaus opisuje ją w swoim „Kalejdoskopie matematycznym” (*rys.4*).



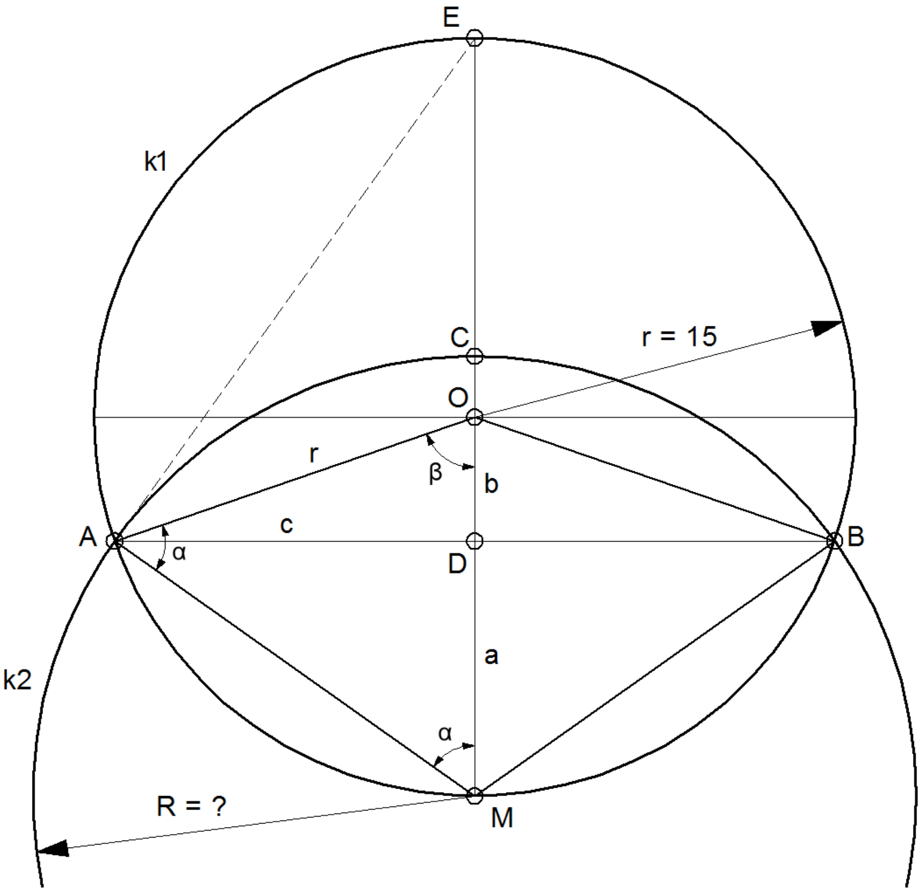
Rys. 4

Artylerzysta, strzelając do celu, otrzymuje od obserwatora po każdym strzale sygnał „przed” lub „za” celem i w zależności od otrzymanej informacji odpowiednio koryguje celownik. Stosując tę taktykę pociski uderzają coraz bliżej celu i w końcu trafią w niego.

Podobnie możemy postępawać przy obliczaniu promienia R w naszym zadaniu.
Najpierw oszacujemy dolne i górne ograniczenie jego długość. Patrząc na *rys.3* możemy założyć, że szukana długość *R* jest większa od 16 i mniejsza od 18 m. Nasz pierwszy „strzał” oddamy „w środek”, czyli przyjmiemy, że *R=17.* Z tą wartością obliczymy pole dostępne kozie i porównamy je do pola powierzchni połowy łąki. W zależności od otrzymanego wyniku korygujemy dolne lub górne ograniczenie długości *R*. I znowu strzelamy „w środek” (tym razem *R=17,5*) itd.
Po kilku, czy też kilkunastu „strzałach” będziemy w stanie określić szukaną długość *R* z wystarczającą dokładnością.

Metoda „strzelania w środek” (połowienia) jest najlepszą taktyką zbliżania się do celu.

Na rysunku poniżej (*rys. 5*) widzimy wszystkie elementy potrzebne do obliczeń.



Rys. 5

Pole łąki wynosi $\pi \cdot r^2$. Zatem połowa pola łąki wynosi $P = \frac{\pi \cdot 225}{2}$. Część łąki znajdującej się w zasięgu kozy ma kształt soczewki *ACBM*, składającej się z dwóch wycinków koła, pokrywających się częściowo. Zatem pole tej soczewki składa się z sumy pola wycinka koła k_1(*OAMB)* i pola wycinka koła k_2(*MACB)* zmniejszoną o ich wspólną część, czyli o czworokąt *AOBM*.

Niech S_k = poszukiwany fragment łąki,

S_1 = pole wycinka koła k_1,

S_2 = pole wycinka koła k_2,

S_3 = pole czworokąta

Mamy więc

$$S_k = S_1 + S_2 - S_3.$$

Z trójkąta prostokątnego ADE (*rys. 5)* wynika, że:

$$AM^2 = MD \cdot ME$$

czyli:

$$R^2 = a \cdot 2r$$

stąd

$$a = \frac{R^2}{2a} = \frac{R^2}{30}, \quad b = 15 - a, \quad c = \sqrt{r^2 - b^2} \quad \text{czyli } c = \sqrt{225 - b^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{R}, \quad \cos\beta = \frac{b}{15}$$

a zatem

$$S1 = \alpha \cdot R^2, \; S2 = \beta \cdot r^2 = \beta \cdot 225$$

$$\text{i} \quad S3 = r \cdot c = 15 \cdot c$$

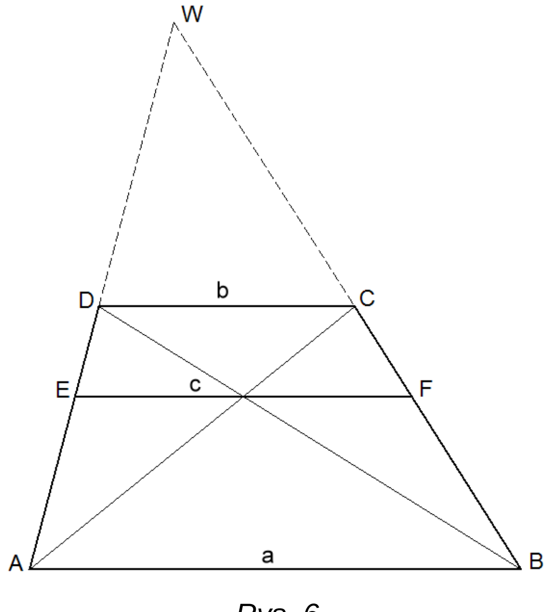
Do obliczenia poszukiwanego *R* użyjemy komputera. Obok napisany jest ktrótki program w Basic'u, który pozwala wyznaczyć długość promienia R.
Aby wyliczyć *R* z dokładnością do 1 m, wystarczy powtórzyć jego pętle w 21 krokach.
W wyniku otrzymamy wówczas ***R = 17,381 m**.*

Czytelnik może dostosować przykład tego programu do własnych możliwości, np. zaadoptować go do programu Pascal lub arkusza kalkulacyjnego Excel i porównać własne wyniki z uzyskanymi.

```
d = 16        //dolna granica
g = 18        //górna granica
P = PI * 15 * 15 / 2    //połowa pola łąki
Repeat
  k% = k% + 1        //licznik kroków
  R = (d + g) / 2
  a = R * R / 30
  b = 15 - a
  c = Sqrt(225 - b * b)
  alfa = Acos(a / R)
  beta = Acos(b / 15)
  S1 = alfa * R * R
  S2 = beta * 225
  S3 = 15 * c
  Sk = S1 + S2 - S3
  If Sk > P  Then
    g = R
  Else
    d = R
  EndIf
Until Abs(Sk - P) < .000001
Print k%
Print R
```

Suplement

W pierwszym zadaniu mieliśmy do czynienia z trapezem. Warto wspomnieć przy okazji o pewnej własności trapezu.
W dowolnym trapezie *ABCD* narysujmy obie przekątne, odcinek *EF* przechodzący przez ich punkt przecięcia (równoległy do podstaw trapezu, przy czym punkty *E* i *F* leżą odpowiednio na bokach trapezu) i przedłużenie boków do ich punktu przecięcia *W* (*rys. 6*).



Rys. 6

Oznaczmy: *AB=a, CD=b* i *EF=c*. Okazuje się, że odcinek EF jest **średnią harmoniczną** obu podstaw trapezu (patrz zadanie 1). A więc:

$$c = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Albo inaczej:

$$c = \frac{2ab}{a + b}$$

Trzy punkty *A, D, E* leżące na lewym boku i punkt *W* tworzą łącznie tzw. **czwórkę harmoniczną** *(ADEW)*. Podobnie cztery punkty na drugim boku: *(BCFW)*. W takiej czwórce zachowane są pewne dwustosunki. Przykładowo dla pierwszej czwórki mamy:

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AW}{DW} \quad \text{a dla drugiej} \quad \frac{BF}{FC} = \frac{BW}{CW}$$

Mało tego – obie czwórki przyjmują tę samą wartość która wynosi $\frac{AB}{CD}$ (dlaczego?)

Czwórki harmoniczne odgrywają dużą rolę w geometrii rzutowej, a więc również w perspektywie geometrycznej. Faktycznie, rys. 6 możemy potraktować jako obraz perspektywiczny dwóch jednakowych prostokątów mających jeden wspólny bok (dlaczego?). O takich prostokątach mówimy, że są jednakowe w przekształceniu rzutowym.

Autor:
mgr inż.-arch. Tadeusz Doroziński,
Düsseldorf, 2008