Tadeusz Dorozinski und Eduard Baumann

Rundheit von Polyedern

Wenn wir beurteilen wollen, ob ein Polyeder „rund“ ist, benutzen wir die Begriffe wie Rundheit, Sphärizität, Kugelähnlichkeit.

Da die Polyedervielfalt sehr groß ist, ist die Wahl der Kriterien für die Beurteilung und zum Bemessen der Rundheit nicht so einfach.

Bezeichnen wir die Rundheit eines Polyeders *P* mit ***r***. Für eine Kugel, als Idealfall, ist natürlich ***r = 1***.

Nahe liegt ein Vergleich das Volumen des Polyeders mit dem Volumen seiner Umkugel, also:

$$r(U) = V(P)/V(U)$$

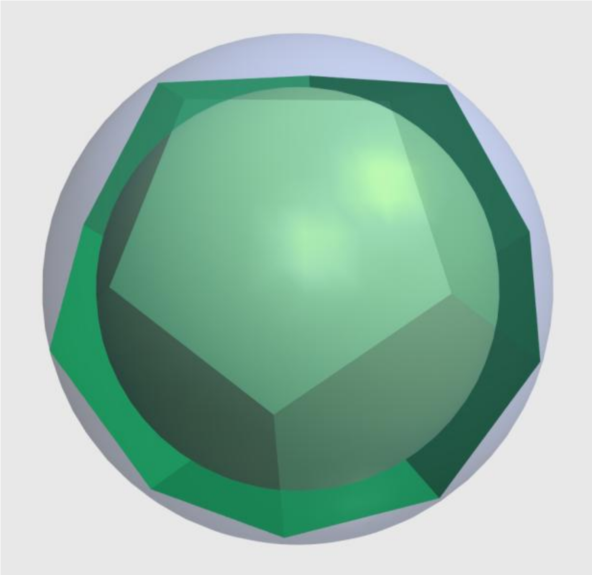
Nach dieser Formel hat unter den platonischen Körpern das Dodekaeder mit 0,665 die größte Rundheit vor dem Ikosaeder mit 0,605. Unter den archimedischen Körpern ist das Große Rhombenikosidodekaeder mit 0,898 am rundesten. Dicht dahinten liegt das abgeschrägte Dodekaeder mit 0,896.

Bemerkung: bei nicht regulären Polyedern wird die kleinste Umkugel berücksichtigt. Im Computer-Programm *Stella4D* wird der Radius R der kleinsten Umkugel im Infofenster automatisch angezeigt.

Bei einer anderer Methode die Rundheit zu bestimmen kann man vorgehen wie im Archimedes-Verfahren zum Berechnen der Zahl **π**. Es wird also neben dem Volumen der Umkugel auch das Volumen der größten Inkugel des Polyeders berücksichtigt. Dann sieht die entsprechende Formel so aus:

$$r(IU) = V(I)/V(U)$$

Nach dieser Formel sind unter den platonischen Körpern das Dodekaeder und das Ikosaeder gleich rund mit 0,502. Unter den archimedischen Körpern ist das ‚Fußball-Polyeder‘ – das Ikosaederstumpf mit 0,829 am rundesten.



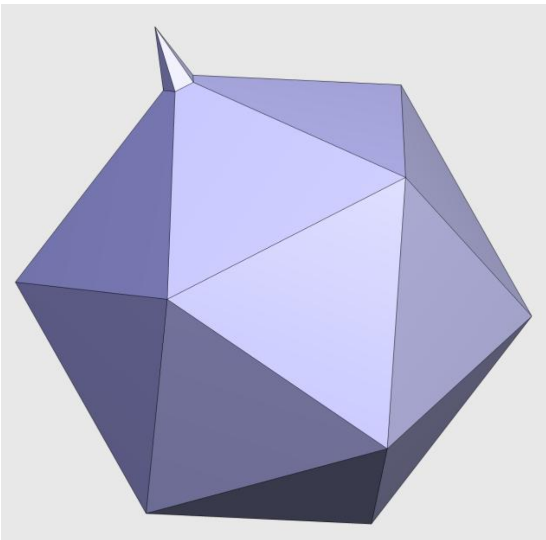
Dodekaeder mit In- und Umkugel

Die dritte Methode die Rundheit zu bestimmen beruht auf der Analogie zum isoperimetrischen Problem auf der Ebene. Da wird nur die Oberfläche und das Volumen des Polyeders berücksichtigt, also:

$$IQ = 36 * \pi * A^3 / V^2$$

IQ – der isoperimetrische Quotient

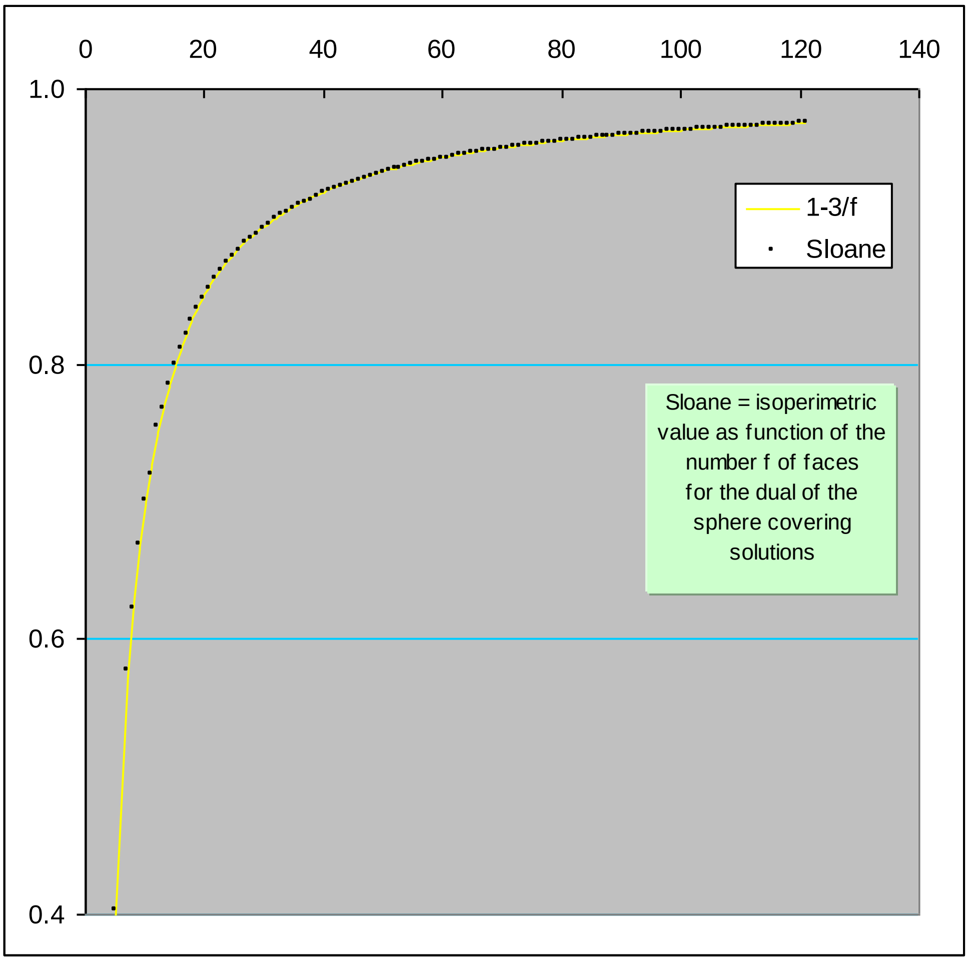
Nach dieser Formel hat unter den platonischen Körpern das Ikosaeder mit 0,829 vor dem Dodekaeder mit 0,755 die größte Rundheit.
Da in dieser Formel weder In- noch Umkugel berücksichtigt werden, sind einige Werte merkwürdig und kontrovers.
Z. B. ein Ikosaeder erweitert um eine Nadel, wie unten dargestellt, ist danach immer noch runder als das Dodekaeder.



Da der Radius der Umkugel in diesem Fall sich sprunghaft vergrößert, fällt die Rundheit ***r(U)*** stark auf 0,280 ab.

Natürlich kann man mit mehr Facetten (***f***) des Polyeders besser große Rundheit erzielen. Die Unterschiede in der Definition der Rundheit sind für größere ***f*** (f >50 und mehr) immer weniger bedeutsam. Wenn man die Arbeit von Sloane benutzt, der der Kugel effizient mit Kreisen zu bedecken suchte, um für viele ***f*** runde Polyeder zu gewinnen, stellt sich heraus, dass der Zusammenhang zwischen ***f*** und Rundheit einer erstaunlich einfachen Form folgt. Es gilt fast genau

$$r = 1 - 3/f$$



* * *

Düsseldorf / Fribourg, im November 2018